

## Раздел II. АНАЛИЗ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ АСПЕКТОВ

### 6

#### К математическому моделированию степенных и сверхстепенных распределений в социальных системах\*

А. С. Малков, Ю. В. Зинькина, А. В. Коротаев

*Общество – это среда, имеющая комплексную структуру связей между людьми. Это могут быть отношения между друзьями, супругами, деловыми партнерами и т. д. На определенном уровне общество можно рассматривать как гигантскую сеть, состоящую из взаимоотношений между людьми. С физической точки зрения общество можно рассматривать как пористую среду. Подобные среды широко известны такими свойствами, как самоорганизованная критичность, перколяция, степенное распределение размеров кластеров системы и др. В таких средах могут наблюдаться сверхбольшие суперкритические явления (Д. Сорнетт предложил называть такие явления термином “dragon-kings”). Они могут возникать в двух случаях: когда система находится под возрастающим стрессом (сценарий самоорганизованной критичности) либо когда в системе наблюдается рост проводимости (сценарий перколяции). В социальных системах первый сценарий типичен для негативных явлений – кризисов, войн, революций, финансовых коллапсов, распадов государств и др. Второй сценарий более характерен для позитивных явлений, таких как возникновение городов, рост фирм, экономические чудеса, диффузия технологий, формирование социальных сетей и т. д. Если соблюдаются оба условия (растущий стресс и увеличение проводимости), то это может привести к возникновению особенно крупных явлений, охватывающих если не все, то большую часть человеческого общества в различные исторические эпохи: это, к примеру, создание Монгольской империи, мировые религии, мировые войны, взрывообразный рост интернет-сервисов. Статья де-*

---

\* Исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-06-00476).

*тально описывает эти два сценария с учетом обзора исторических случаев появления суперкритических явлений начиная с ранней истории человечества до последних десятилетий и ближайшего будущего человеческого общества. Показано, что суперкритическое явление – это не случайный аутлаер, выпадающий из степенного распределения, а естественное следствие появления очень крупного кластера в пористой перколяционной среде.*

***Ключевые слова:** социальная история, степенные распределения, пористая среда, социальные сети, суперкритические явления, перколяция, самоорганизованная критичность.*

## **Введение**

Общество – это большая многокомпонентная система, состоящая из индивидуумов и связей между ними. В свою очередь, социальные явления выражаются в совместном действии больших масс людей – совместном выборе, синхронных действиях, согласованных решениях. Чем больше людей вовлечено в явления или процессы, тем более заметными и резонансными они будут в историческом масштабе.

Одной из актуальных тем исследований в последние годы стало развитие теории сетей (Albert, Barabasi 2002), процессов распространения информации и решений в сетях, распределений в сложных системах (Clauset *et al.* 2009). Рынки товаров и услуг имеют принципиально сетевую структуру (Anderson 2006). Биржевая игра определяется коллективными эффектами в среде трейдеров (Sornette 2003). Социальные потрясения и конфликты распространяются сетевым образом (Watts 2004).

Имеется также ряд работ, в которых изучаются свойства пористых социальных сред, в том числе степенные распределения в различных социальных явлениях. В работе (Clauset *et al.* 2009) представлены 24 набора данных, относящихся к различным сферам социальных наук, информационных технологий, экономики, биологии и др., в которых наблюдаются степенные распределения. Можно также назвать большое количество работ, в которых изучается степенное распределение в том или ином конкретном социальном явлении. Так, в экономике степенные хвосты выявлены в распределении богатства и личных доходов (в рядах данных по разным странам) (Levy, Solomon 1997; Clementi *et al.* 2006; Sinha 2006). Степенные распределения присутствуют также в колебаниях финансовых рынков (Gabaix *et al.* 2003). Обзор экономических и финансовых явлений, управляемых степенными распределениями, представлен в (Gabaix 2009). Социальные явления, следующие степенному распределению, включают социальные коммерческие сети (Stephen, Toubia 2009), научное цитирование и производительность ученых (van Raan 2001; Petersen *et al.* 2010), динамику фирм (Cook, Ormerod 2003), процесс обучения (Gupta, Campanha 2005), войны (Richardson 1948), теракты (Clauset, Wiegand 2010) и др.

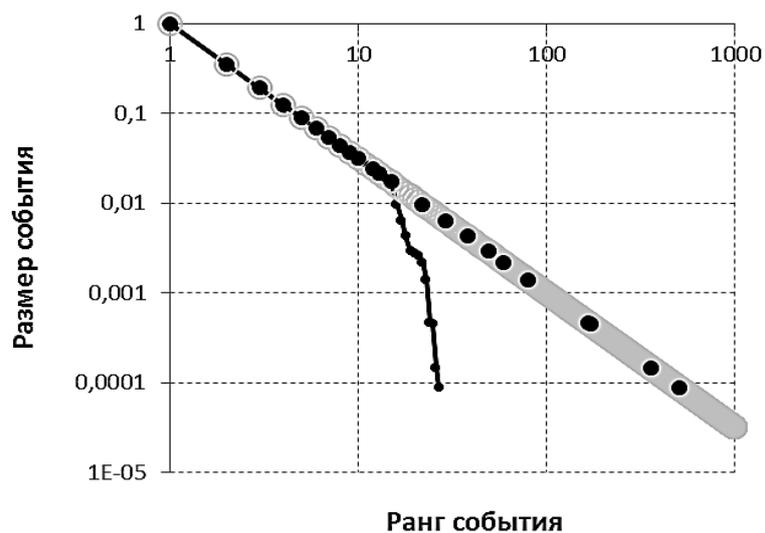
В работе (Sornette 2009) было введено понятие *dragon-king* (которое мы обозначим как «сверхявление») в степенных распределениях. Оно определяется как значимый аутлаер, который сосуществует со степенным законом в распределении явлений по размерам в разнообразных системах. В настоящей статье мы проанализируем возможные сценарии возникновения *сверхявлений* и рассмотрим примеры в человеческой истории.

### **Критерии суперкритических явлений**

Обнаружить суперкритические явления (сверхявления) непросто, в особенности в социальных системах, где ряды статистических данных обычно довольно короткие. В технических системах приборы регистрируют все события (находящиеся в пределах чувствительности того или иного прибора), в социальных же системах явления фиксируются людьми, которые с большой вероятностью обратят внимание на крупные события, которые легче зарегистрировать. Это приводит к тому, что вероятность регистрации мелких событий зависит от их размеров и многие мелкие события не попадают в выборку. В результате длинный «хвост» мелких событий существенно сокращается, и степенное распределение начинает выглядеть как экспоненциальное или другое короткое распределение.

На Рис. 1 показано непрерывное распределение для степенного закона с показателем степени 1,5. Черные точки – зарегистрированные элементы базового распределения, вошедшие в выборку. Предполагается, что вероятность регистрации зависит от размера события, – чем меньше события, тем реже они регистрируются. Линией показано ранг-размерное распределение зарегистрированных событий (черных точек), оно не выглядит степенным, хотя исходные данные четко степенные. Это может ввести в заблуждение экспериментатора, и в итоге он будет трактовать данные неверным образом.

Вышеописанная проблема препятствует изучению распределений в социальных науках, так как подобные распределения обычно слишком короткие и подвержены влиянию человеческого фактора при исследовании. Для обнаружения *сверхявлений* физики строят распределения и аппроксимируют их степенными функциями. Однако в социальных науках применить такой подход сложно. В связи с этим в настоящей работе для небольших выборок (менее 30 событий) основным методом выявления сверхявлений будет не аппроксимация распределения в двойном логарифмическом масштабе (как в физике), а другой критерий. Мы будем считать *сверхявлением* первый элемент в выборке, если его масштаб составляет 70–90 % от всего распределения. В завершение статьи на примере математической модели мы покажем, что явление, охватывающее практически систему, может рассматриваться именно как *сверхявление* в суперкритической фазе.



**Рис. 1.** Зарегистрированные события

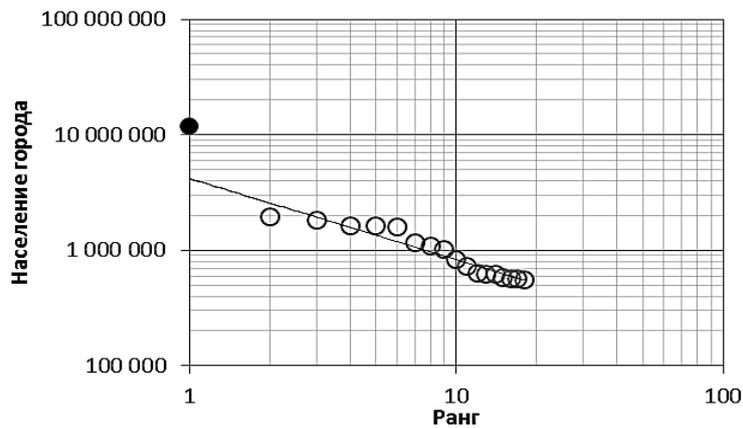
В настоящей статье графики выборок, содержащих менее 30 событий, будут представлены не в двойном логарифмическом, а в обычном масштабе, чтобы показать более наглядно истинный масштаб сверхявлений. Полагаться на форму кривой в двойном логарифмическом масштабе при малом числе точек нецелесообразно, в то время как разница между первым явлением и остальными будет намного более показательной.

### **Происхождение суперкритических явлений**

Суперкритические явления – сверхкрупные явления, выпадающие из распределения. Наш анализ показывает, что есть четыре различных случая, в которых возможно появление таких сверхкрупных явлений.

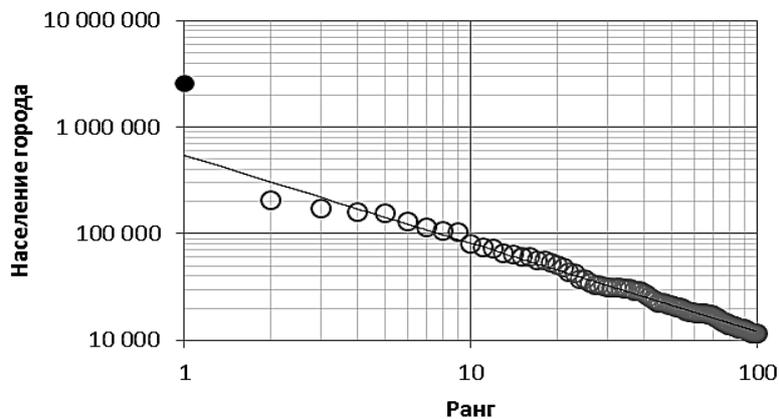
#### **Эффект столицы**

Во многих государствах численность населения столицы явно выпадает из общего распределения численности населения городов, в то время как второй, третий, четвертый и т. д. города отличаются друг от друга в определенной пропорции; эта пропорция не выполняется, если сравнить самый крупный город (столицу) со вторым городом по размеру. Столица намного крупнее (см., например, Рис. 2 и 3).



**Рис. 2.** Ранг-размерное распределение населения городов Франции в 2010 г.

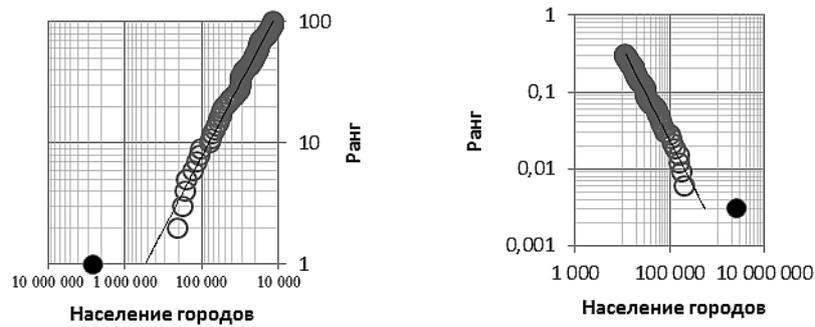
*Источник:* World Gazetteer 2011. *Комментарий:* сверхъявление – Париж.



**Рис. 3.** Ранг-размерное распределение населения городов Венгрии в 2010 г.

*Источник:* World Gazetteer 2011. *Комментарий:* сверхъявление – Будапешт.

*Примечание.* В настоящей статье диаграммы даны в ранг-размерном формате. В некоторых других публикациях используется формат кумулятивной функции распределения или кумулятивной ранговой диаграммы (Рис. 4). Все три формата эквивалентны друг другу при перемене мест осей абсцисс и ординат. Мы хотели бы привлечь внимание читателей к этому факту, так как он может вызвать недопонимание при сопоставлении графиков с другими работами. Во избежание этого в настоящей статье мы будем пользоваться только ранг-размерным форматом.

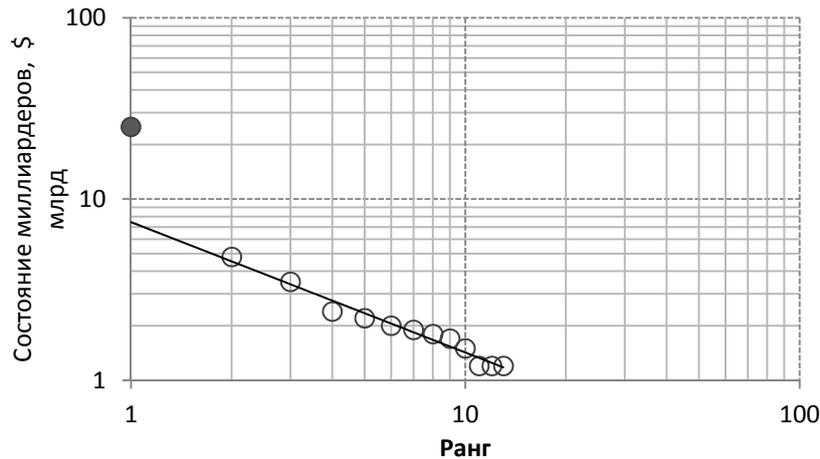


**Рис. 4.** Кумулятивная ранговая диаграмма и кумулятивная функция распределения населения городов Венгрии, 2010 г., двойной логарифмический масштаб

Столицу можно назвать суперкритическим явлением, однако это будет не вполне корректно. По сути, мы рассматриваем две разные выборки. Столица – не такой же город, как остальные, а лишь самый крупный, по сути, этот город не равноценен другим в государстве, так как принадлежит к иной метасистеме, к Мир-Системе (подробнее об этом см., например: Коротаев 2007; Коротаев, Гринин 2007; Коротаев и др. 2007; Korotayev 2005; Korotayev, Grinin 2006; 2012; 2013), мировой политической системе, в которую другие города страны не входят. В столице сконцентрирован ряд финансовых и политических институтов, отсутствующих в других городах страны. По этой причине столицу и прочие города неправомерно рассматривать в одной выборке.

Еще один пример подобного эффекта можно назвать *lucky villager* (удачливый провинциал). Если взять статистику выигрышей в азартные игры населения небольшого города или деревни, где есть один-два игорных дома, относительно регулярно посещаемых местными жителями, то размер этих выигрышей будет распределяться достаточно равномерно. Однако если кому-либо из жителей повезет выиграть в национальной лотерее главный приз, это станет явным сверхявлением в городской статистике. Как и в случае со столицами, возникновение аутлаера здесь не происходит из свойств системы (деревни) или ее эволюции, а является проявлением существования более крупной внешней системы (страны и национальной лотереи). Здесь следует отметить, что при наличии более крупной внешней системы суперкритическое явление может существовать в локальной статистике достаточно долго. К примеру, столица может быть мегагородом страны в течение нескольких столетий. На Рис. 5 показан аутлаер в распределении состояния миллиардеров в Испании. При относительно небольшом их числе самому крупному «повезло» несколько

больше, чем остальным, и, очевидно, его состояние сделано далеко не только за счет внутреннего испанского рынка.



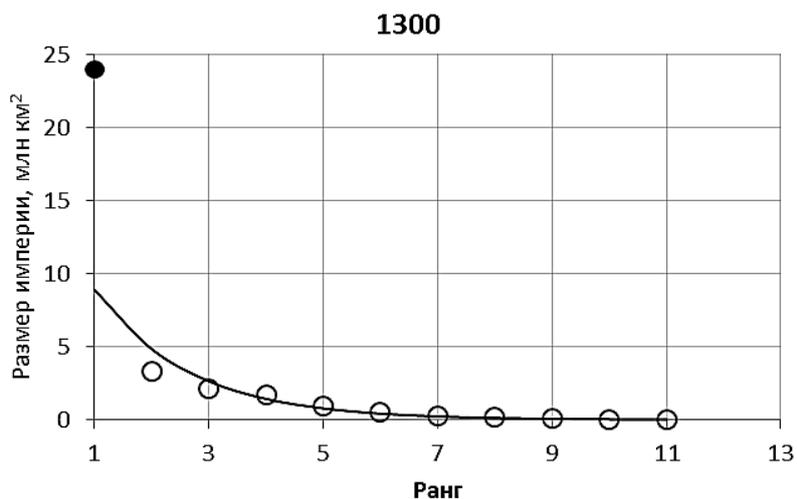
**Рис. 5.** Распределение миллиардеров в Испании, 2011 г.

*Источник:* база данных Форбс. *Комментарий:* сверхъявление – состояние Амансио Ортеги, магната индустрии моды.

### **Слияния и поглощения лидеров**

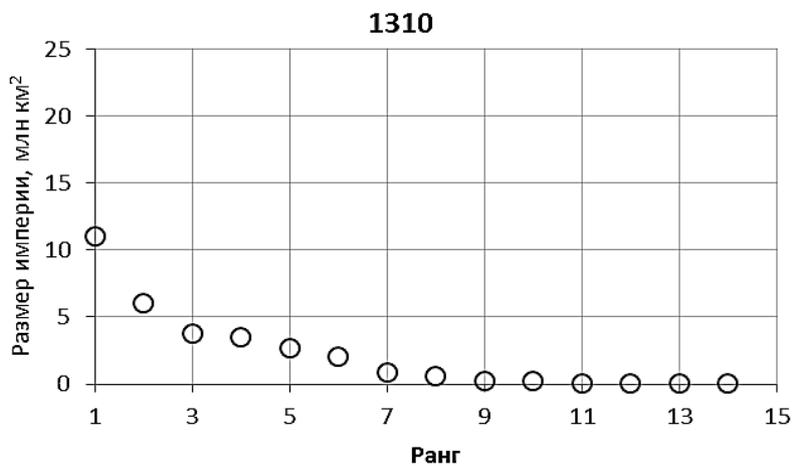
Другим частым примером возникновения сверхкрупного, выбивающегося из общей статистики события может быть следствие взаимодействия между первым и вторым элементом выборки. Пусть у нас имеется сложившееся распределение, например степенное. В случае, если по каким-либо причинам второй по величине игрок пропадает из распределения или поглощается первым, первый игрок оказывается на порядок крупнее ближайших конкурентов.

В отличие от предыдущего случая такое суперкритическое явление, как правило, недолговечно. Содержание такого сверхкрупного лидера, объединенного скорее формально, нежели реально, выходит за возможности существующих технологий поддержания стабильности распределения и в течение некоторого времени ведет к распаду лидера или к перераспределению ресурсов (появление нового второго игрока) (см. Рис. 6 и 7).



**Рис. 6.** Распределение империй по размеру в период наивысшего могущества Монгольской империи (ок. 1300 г. н. э.)

*Источник:* Таагерга 1997. *Комментарий:* сверхъявление – Монгольская империя.



**Рис. 7.** Распределение империй по размеру непосредственно после распада Монгольской империи (около 1310 г. н. э.)

*Источник:* Таагерга 1997. *Комментарий:* сверхъявление в данном случае отсутствует.

Монгольская империя начала активно формироваться с 20-х гг. XIII в. и к 1300 г. занимала 72 % всей площади, контролируемой различными империями мира, однако затем в течение нескольких лет она распалась.

Описанные два сценария возникновения сверхъявлений не являются предметом настоящего исследования. В данной работе мы планируем описать механизмы возникновения сверхъявлений в результате естественной эволюции системы. Рассмотрим два сценария возникновения таких явлений.

### **Сценарий системы под стрессом**

В теории критичности есть классические модели, такие как «куча песка» (*sandpile model*) или «разрыв пучка волокон» (*fiber bundle model*). Суть моделей состоит в том, что когда система находится под нарастающим стрессом, в какой-то момент она вынужденным образом сбрасывает это напряжение, неминуемо провоцируя крупное событие.

В модели «куча песка» на вершину кучи постоянно добавляются песчинки. Как правило, падение одной песчинки приводит к обвалу всего нескольких других песчинок. Но учитывая, что угол наклона кучи не может бесконечно расти, при достижении некоторого критического угла наклона начинают возникать лавины, которые охватывают весь склон. Таким образом, добавление одной песчинки вызывает крупное явление.

В модели «разрыв пучка волокон» имеется набор волокон, которые находятся под нагрузкой. Волокна имеют различную прочность. Если возрастающая нагрузка переходит определенный порог, одно из волокон ломается, а оставшаяся нагрузка перераспределяется между остальными волокнами, что в свою очередь может привести к «лавине» обрывов. Здесь опять обрыв одного из волокон может вызвать последовательный обрыв большого числа других волокон. Слишком большая нагрузка приводит к разрыву всего пучка.

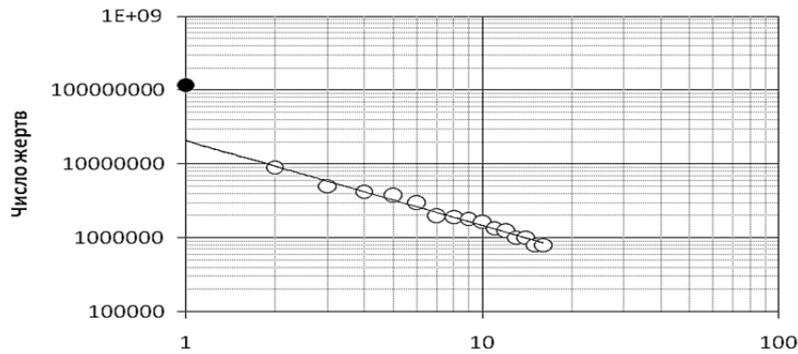
В описанных моделях мы сталкиваемся с ситуацией, когда система находится под нарастающим стрессом, который в какой-то момент неминуемо приведет к возникновению макроскопического кризиса, охватывающего всю систему. Будет ли это событие вписываться в общее распределение?

В классической модели «куча песка» крупные события (лавины) входят в общее распределение. Куча песка приближается к критическому наклону, который определяется физическими свойствами песчинок (гравитацией, их размером, влажностью), и когда куча находится в этом критическом состоянии, наблюдается степенное распределение размеров лавин. Хотя крупные события и имеют место, они не являются суперкритическими явлениями по отношению к другим событиям.

В реальности же система может перейти из предкритического в закритическое состояние в результате изменения внешних условий или эволюции свойств самой системы. Когда система находится в предкритическом состоянии, крупные события невозможны. Когда же она совершает скачок в закритическую фазу, они становятся неизбежными – система сбрасывает стресс одной крупной лавиной, охватывающей всю систему (либо всю интегрированную ее часть).

Таким образом, мы предполагаем, что один из важных сценариев возникновения *сверхъявления* – это случай системы под стрессом, для которой в докритическом, близком к критическому состоянии формируется статистическое распределение, а затем в определенный момент восприимчивость элементов (ячеек, волокон, людей) к стрессу переходит критическую границу и возникает сверхкрупное событие – лавина, охватывающая всю систему. Это явление выбивается из статистики, поскольку вся предыдущая статистика относилась к докритическому состоянию, а явление происходит при закритическом наборе параметров. В свою очередь, после прохождения этой крупной лавины система сбрасывает напряжение и вновь возвращается к докритическому состоянию, то есть последующая статистика опять будет несопоставима с суперкритическим явлением (см., например: Sornette 2003).

Один из примеров такого сценария можно найти в статистике восстаний и гражданских войн, вспыхивавших обыкновенно под давлением роста населения в условиях ограниченных ресурсов. Растущий стресс (голод, нестабильность) действовал на всю систему и увеличивал чувствительность всех элементов, облегчая вовлечение их в восстание (см. Рис. 8).



**Рис. 8.** Распределение по размеру крупнейших восстаний и гражданских войн XIX–XX вв.

*Источники:* White 2010; оценки тайпинского восстания: Huang 2002. *Комментарий:* двойной логарифмический масштаб. Суперкритическое явление – тайпинское восстание в Китае (середина XIX в.).

Необходимо отметить, что большинство жертв тайпинского восстания погибли не в результате прямого насилия, а от болезней, голода, наводнений и др., напрямую связанных с восстанием. Наибольшие разрушения были вызваны прорывом дамб на реке Хуанхэ в 1853 г. В результате великая китайская река изменила свое русло (до этих событий она впадала в океан южнее полуострова Шаньдун, а после – к северу от него) и значительную часть густонаселенного Северного Китая в буквальном смысле смыло. Большое число людей погибли в самом наводнении, еще больше остались без средств к существованию и были вынуждены бежать в города, где измотанное восстанием правительство не имело возможности обеспечить их продовольствием. В результате миллионы людей скончались от болезней и голода (см., например: Коротчаев и др. 2010).

Это сценарий системы под стрессом. Лавина, обрушенная тайпинским восстанием, привела к цепочке других восстаний в различных частях империи Цин, спровоцировала британско-французскую интервенцию, катастрофическое наводнение и т. д. К началу восстания система уже была перенапряжена перенаселением, недостатком продовольствия и др.; начавшийся кризис спровоцировал и усугубил разрушение инфраструктуры и неминуемый коллапс.

### **Сценарий перколяции**

Перколяция – явление просачивания через пористую среду. Пусть у нас есть сеть ячеек, которые могут быть попарно связаны, но наличие этих связей случайно. В теории перколяции изучается вопрос о наличии сквозной связи между двумя выбранными элементами сети: существует ли путь в этом графе, по которому можно пройти от одного элемента до другого. Второй изучаемый вопрос – как распределены кластеры сети по размерам. Кластерами называют наборы элементов графа, которые связаны друг с другом, но не связаны ни с одним из элементов других кластеров.

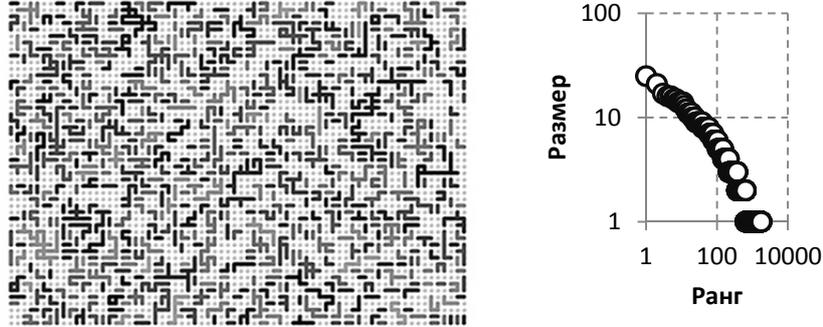
Формирование перколяционных кластеров очень хорошо интерпретируется для социальных систем. Перколяционный кластер – это набор людей, которые сделали определенный выбор, например, выбрали определенную марку товара, вступили в одну организацию, включились в какую-либо общую активность под влиянием выбора друг друга. Граница кластера проходит по связям, которые значительно слабее, чем связи людей внутри кластера. Связь с людьми из других кластеров также присутствует, но она не настолько сильна, чтобы выбор, возобладавший в первом кластере, проник и заполнил бы соседний кластер.

Таким образом, примеры кластеров в обществе – это охват потребителей товаров на рынке, границы государств, различные сообщества: политические, религиозные, по интересам, языковые группы, сторонники различных решений о продаже или о покупке на бирже.

Простейшей реализацией модели перколяции является прямоугольная сетка, в которой наличие ребра между узлами сетки определяется случайной функцией с равномерным распределением. Критическое значение вероятности для такой модели равно  $p_c = 0,5$ .

*Предкритическая фаза,  $p < p_c$*

Если вероятность связей между соседними узлами сетки ниже критического уровня, то возникает большое число маленьких кластеров.

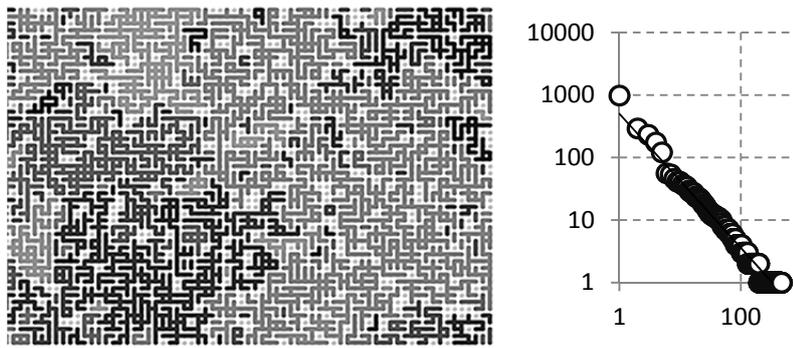


**Рис. 9.** Перколяционные кластеры и их распределение по размерам при  $p = 0,25$

Распределение кластеров по размерам в субкритическом режиме не является степенным и может быть приближено экспоненциальным законом. В распределении преобладают кластеры минимального размера – 1 или 2 ячейки, доля которых сопоставима с размером системы (при  $p = 0,25$  около половины узлов решетки относятся к кластерам размера 1 и 2).

*Критический порог,  $p \rightarrow p_c$*

По мере приближения значений вероятности связи к критическому уровню картина кластеров усложняется, они приобретают фрактальную структуру и теряют характерный масштаб.



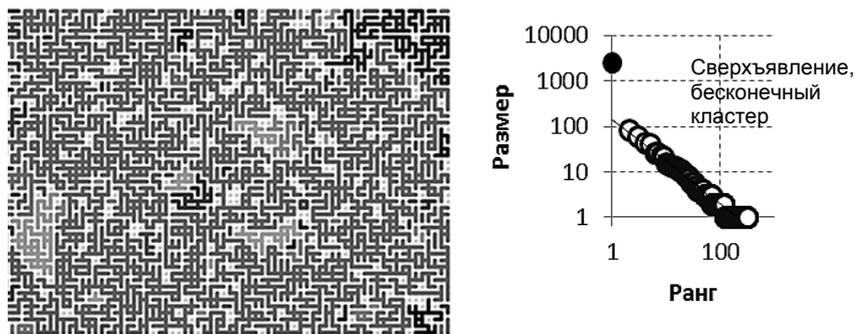
**Рис. 10.** Перколяционные кластеры и их распределение по размерам при  $p = 0,48$

Распределение кластеров по размеру приобретает четко выраженный степенной характер. В системе наблюдается максимальное разнообразие кластеров, нет четко выраженного характерного размера. В кластерах большого количества «мостов» – одиночных связей между двумя элементами, удаление которых приведет к распаду кластера на части. То есть система кластеров уязвима и крайне чувствительна к малым изменениям (добавлению или удалению одной связи).

#### *Закритическая фаза, $p > p_c$*

Когда вероятность связи превышает критическое значение, система внезапно становится связанной в единое целое. В системе возникает один огромный кластер (*infinite cluster*), покрывающий всю систему за исключением вкраплений – небольших изолированных кластеров.

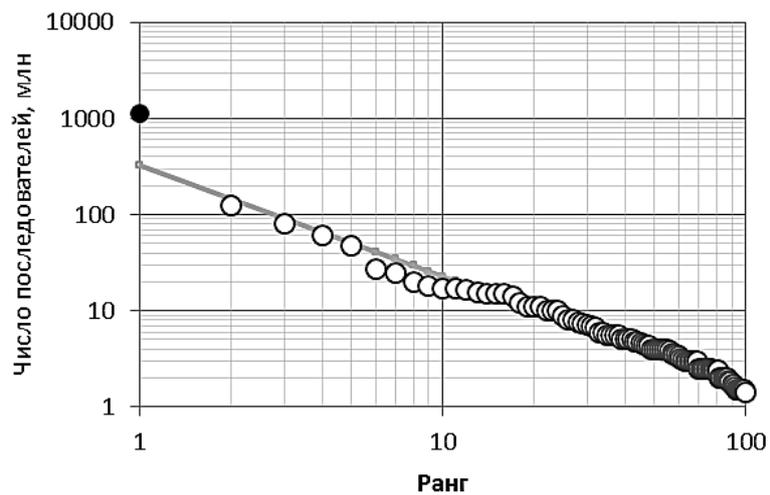
Статистика кластеров имеет степенное распределение, за исключением того, что в системе возникает *сверхявление*, огромный кластер, охватывающий практически всю систему. Этот кластер устойчив к возмущениям, разрушение нескольких связей не может привести его к распаду на составные части.



**Рис. 11.** Перколяционные кластеры и их распределение по размерам при  $p = 0,52$

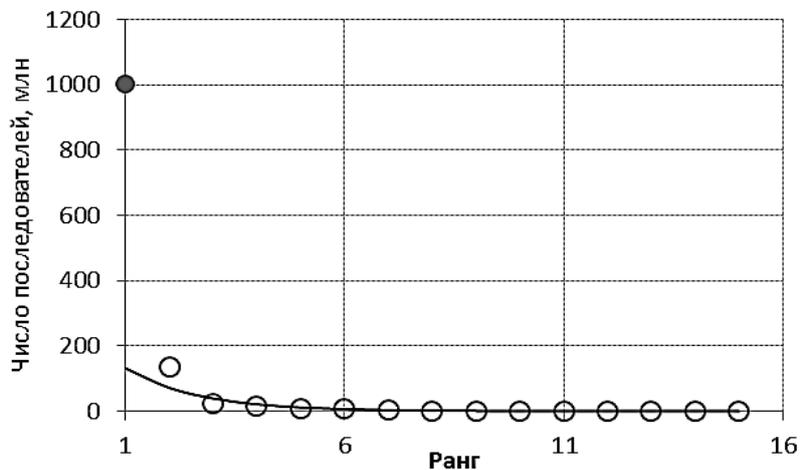
Таким образом, вторым сценарием возникновения суперкритических явлений наряду со сценарием системы под стрессом мы можем считать сценарий перколяции, который заключается в увеличении вероятности наличия связей (или силы связей) сверх критического значения. Фактически такой сценарий срабатывает, когда в системе внезапно увеличивается связность (снижаются ограничительные барьеры, удешевляются коммуникации и логистика, усложняется топология связей), в этих условиях возникает эффект «глобализации», когда один из кластеров внезапно расширяет свое влияние на всю систему.

Примеры такого сценария можно найти в распространении мировых религий, при котором возникли суперкритические явления – наиболее крупные религиозные течения, как в христианстве (римское католичество), так и в исламе (суннизм) (см. Рис. 12, 13).



**Рис. 12.** Распределение течений христианства по числу последователей (млн человек)

*Источник:* World Council... 2011. *Комментарий:* сверхявление – римская католическая церковь.

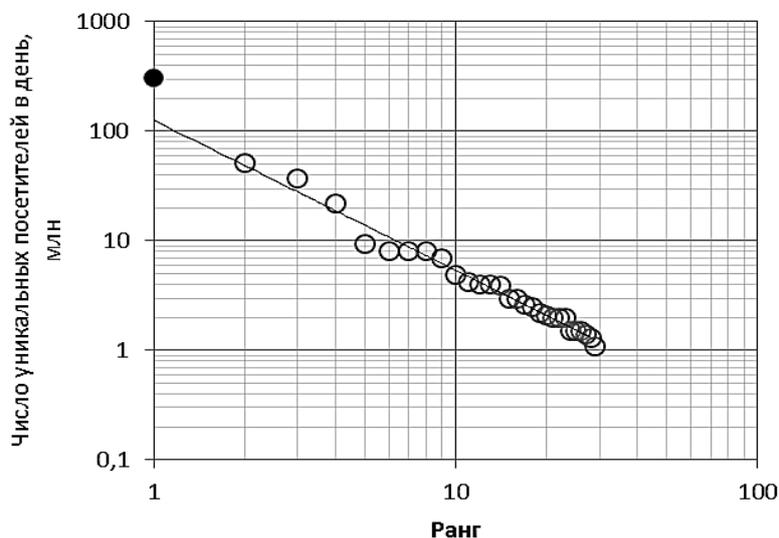


**Рис. 13.** Распределение течений ислама по числу последователей (млн человек)

*Источник:* The Pew... 2011. *Комментарий:* сверхявление – суннитский ислам (83 % всех мусульман – сунниты).

Еще один пример сценария связности (вместе со сценарием стресса) реализовался в эпидемии чумы в XIV в. Возникновение Монгольской империи, способствовавшей развитию Великого шелкового пути, существенно увеличило связность Мир-Системы. В то же время изменения климата и голод сделали города более уязвимыми для болезней. Эпидемия чумы уничтожила около 40 % населения Европы, Китая и Средней Азии, образовав огромный связный кластер.

Еще более четко сценарий перколяции проявился в распространении феномена «Фейсбука» (см. Рис. 14 и 15).



**Рис. 14.** Распределение социальных сетей по числу уникальных посетителей в день (млн человек)

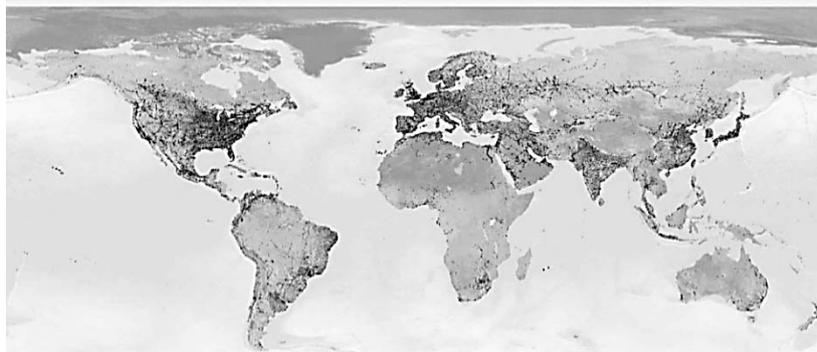
*Источник:* Pingdom 2011. *Комментарий:* сверхъявление – «Фейсбук» в 2011 г., занимавший более 60 % рынка.

Взрывообразное распространение Интернета резко увеличило проводимость Мир-Системы и привело к возникновению больших связных кластеров. Одним из наиболее ярких примеров таких кластеров являются социальные сети (сравните Рис. 15 и 16).



**Рис. 15.** Связи в «Фейсбуке», декабрь 2010 г.

*Источник:* Butler 2010.

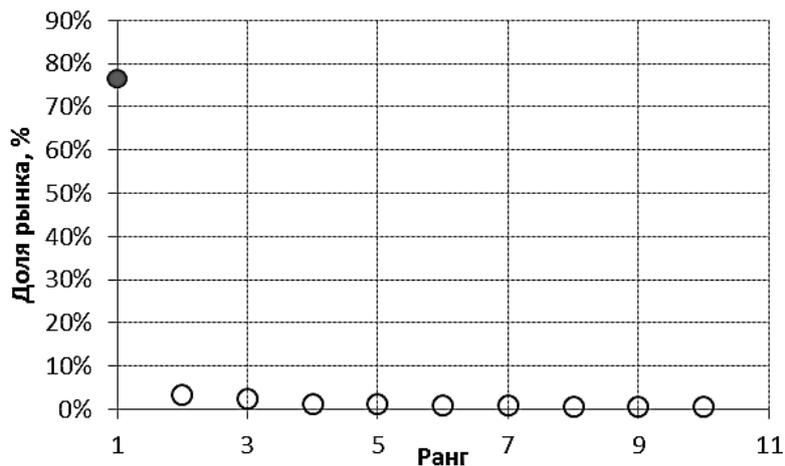


**Рис. 16.** Земля ночью (инверсия – чем темнее регион, тем сильнее он освещен ночью)

*Источник:* Earth at Night. URL: [http://apod.nasa.gov/apod/image/0011/earthlights2\\_dmsp\\_big.jpg](http://apod.nasa.gov/apod/image/0011/earthlights2_dmsp_big.jpg).

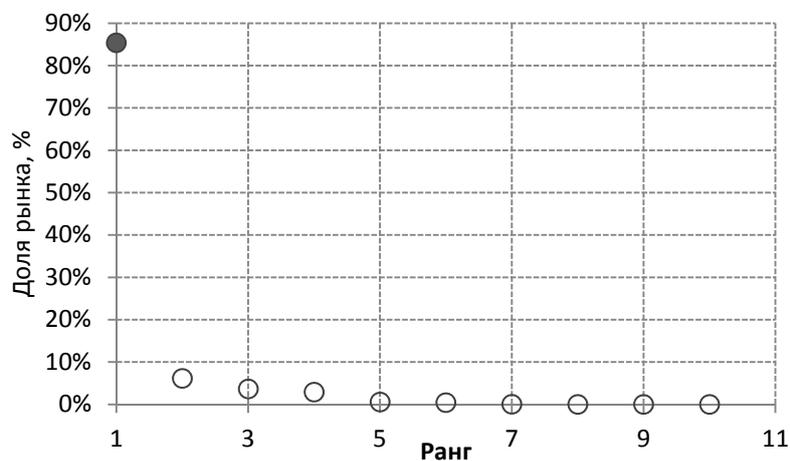
Это изображение можно считать «картиной распределения мирового богатства», так как освещенность представляет плотность населения в сочетании с подушевым благосостоянием. Легко заметить, что карты освещенности и охвата «Фейсбуком» очень схожи, за исключением Китая и России (эти территории хорошо освещены, но слабо охвачены «Фейсбуком!»). Это показывает эффект глобализации совместно с меньшими кластерами (национальные социальные сети в Китае и России). В России и Китае распространены локальные социальные сети, однако возрастание связности и уменьшение барьеров могут вызвать быстрое распространение «Фейсбука» на эти территории в ближайшие 5 лет.

Другими примерами суперкритических явлений в Интернете являются поисковая система *Google* и видеохостинг *YouTube* (см. Рис. 17 и 18).



**Рис. 17.** Топ-10 видео-, мультимедиа-, веб-сайтов

Источник: Marketing Charts 2011. Комментарий: сверхъявление – *YouTube*, чья доля рынка составляет 77 %.



**Рис. 18.** Топ-10 поисковых систем

Источник: NetMarketShare 2017. Комментарий: сверхъявление – *Google*, чья доля рынка составляет 85 %.

На самом деле увеличение стресса и увеличение связности системы являются двумя сторонами одного и того же процесса, и потому различие между сценариями возникновения суперкритического явления весьма относительно. В обоих случаях такое явление является сверхкрупным событием, охватывающим всю систему, в то время как все остальные события в выборке оказываются маленькими изолированными «островками» внутри гигантского кластера. Однако мы рассмотрели эти два сценария по отдельности, поскольку виды воздействия на систему могут значительно различаться, так как имеются довольно существенные различия между механизмами увеличения стресса и роста связности системы.

Далее мы предлагаем модель социальной перколяции, показывающую, что стресс и связность являются коэффициентами одного уравнения и, следовательно, взаимозаменяемы.

### Модель

Существует довольно большое количество математических моделей, описывающих интересные сетевые эффекты: модель случайных графов (Erdős, Rényi 1960), модель перколяции (Hammersley 1957), модель «куча песка» (Bak *et al.* 1988), модель Изинга (Ising 1925) и др.

При описании процессов, протекающих в обществе, мы можем определить обобщенную модель. Пусть имеется сеть людей (агентов)  $A_{1..n}$ . Между агентами существуют связи  $L_{ij}$ , которые интерпретируются как сила влияния агента  $A_j$  на агента  $A_i$  при принятии решения. Решение в данном случае означает выбор агентом одной из альтернатив  $\alpha_{1..M}$  среди набора альтернатив  $c_i \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M\}$ . Примерами выбора могут быть: предпочтение одного продукта (бренда) из нескольких сходных, обращение в одну из религий, решение о покупке или продаже акций, сохранение нейтралитета в конфликте либо поддержка одной из сторон, регистрация пользователя в одном из интернет-сервисов и др.

Далее мы рассмотрим модель на примере выбора одного бренда товара из нескольких аналогичных (модель может быть распространена и на другие случаи выбора).

Для отдельного покупателя товары различных производителей  $\alpha_{1..M}$  не всегда идентичны, так как некоторые из них менее релевантны для него в данный момент времени. Предположим, что при условии:

- отсутствия начального выбора (покупатель не выбрал ни один продукт,  $c_i = \emptyset$ ),
- *равной осведомленности* покупателя  $U_{im}$  о каждом товаре из выборки  $\{\alpha_m\}$ ,
- отсутствия внешнего влияния на покупателя со стороны других покупателей ( $L_{ij} = 0$ ) – вероятность выбора покупателем  $A_i$  продукта  $\alpha_m$  будет

пропорциональна релевантности  $r_{im}$ , параметры которой задаются множеством агентов и альтернатив.

Рост осведомленности о продукте происходит в результате общения с покупателями, уже использующими этот продукт. Чем более релевантен ( $r_j$ ) продукт, тем больше желание покупателей распространять информацию о нем. Интенсивность информационного обмена зависит также от связи  $L_{ij}$  между агентами.

Таким образом, общий рост осведомленности о продукте может быть описан как:

$$\frac{dU_{im}}{dt} = \sum_{c_j=\alpha_m} L_{ij}r_{jm} - wU_{im}, \quad (1)$$

$$1 \leq i \leq N, 1 \leq m \leq M, \quad (2)$$

где  $U_{im}$  – осведомленность покупателя  $A_i$  о продукте  $\alpha_m$ ;

$r_{im}$  – релевантность продукта  $\alpha_m$  для покупателя  $A_i$ ;

$\sum_{\{c_j = \alpha_m\}} L_{ij}r_{jm}$  – общее влияние соседей  $A_j$ , уже выбравших продукт  $\alpha_m$ ; если агент уже использует продукт,  $L_{ij} = 1$  имеет значение самовлияния;  $w$  – коэффициент забывания/потери актуальности информации.

Очевидно, что осведомленность покупателя не может превосходить 100%. В связи с этим есть дополнительное условие:

$$0 \leq U_{im} \leq 1. \quad (3)$$

Это может быть достигнуто следующим дискретным условием:

$$\frac{dU_{im}}{dt} = 0, \text{ если } U_{im} = 1 \text{ и } \sum_{\{c_j=\alpha_m\}} L_{ij}r_{jm} - w > 0. \quad (4)$$

Это может быть достигнуто также следующим ограничением:

$$\frac{dU_{im}}{dt} = \left( \sum_{\{c_j=\alpha_m\}} L_{ij}r_{jm} - wU_{im} \right) (1 - U_{im}). \quad (5)$$

В обоих случаях качественное поведение модели будет одним и тем же.

Принятие решения о выборе является пороговым процессом, агент делает выбор, когда он достаточно осведомлен о продукте и продукт ему подходит (релевантен для него). Предположим, что изменение выбора происходит тогда, когда осведомленность о другом продукте и его релевантность превосходят таковые для текущего выбора.

Таким образом, переход от продукта 1 (который потребитель  $A_i$  использует в настоящее время) к продукту 2 происходит, если

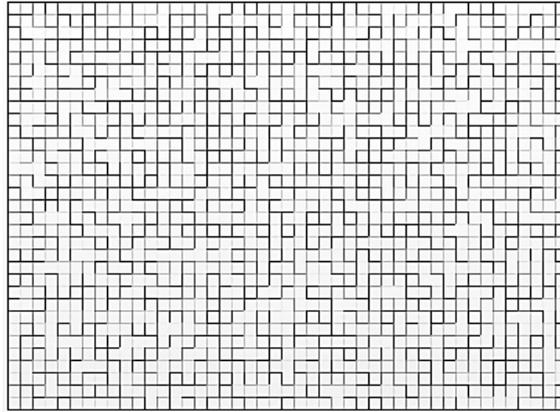
$$U_{i2}r_{i2} > U_{i1}r_{i1}. \quad (6)$$

Итак, в каждый момент времени потребитель использует релевантный продукт, о котором он осведомлен. Однако если внутри кластера знакомых распространится другой продукт (более релевантный и для потреби-

теля, и для его соседей), информация об этом продукте быстро разойдется по кластеру и потребители массово выберут новый продукт.

### Результаты моделирования

Моделирование производится на двумерной сетке, в каждой ячейке которой находится агент. Каждый агент связан с четырьмя другими агентами (сверху, слева, снизу и справа). Связи имеют различную силу, соответственно, пространство разделено барьерами со случайным значением проводимости.



**Рис. 19.** Барьеры между агентами определяются случайным образом

Предположим, что каждый агент модели создает одну альтернативу, которая впоследствии может распространиться по сети. Таким образом, число альтернатив равно числу агентов:  $N = M$ . Изначально каждый агент знает о существовании собственной альтернативы и альтернатив соседей.

Модель имеет следующие параметры:  $C$  – фактор общей связности;  $R$  – фактор общей релевантности;  $D$  – фактор обесценивания информации.

На основе этих параметров рассчитываются модельные коэффициенты:

$L_{ij} = C\xi$ , где  $\xi$  – случайная величина с равномерным распределением вероятности  $0 \leq \xi \leq 1$ ;

$r_{jm} = Rr_m$ , где  $r_m$  – релевантность альтернативы  $m$ , которая равна для всех агентов и является случайной величиной с универсальным распределением вероятности  $0 \leq r_m \leq 1$ ;

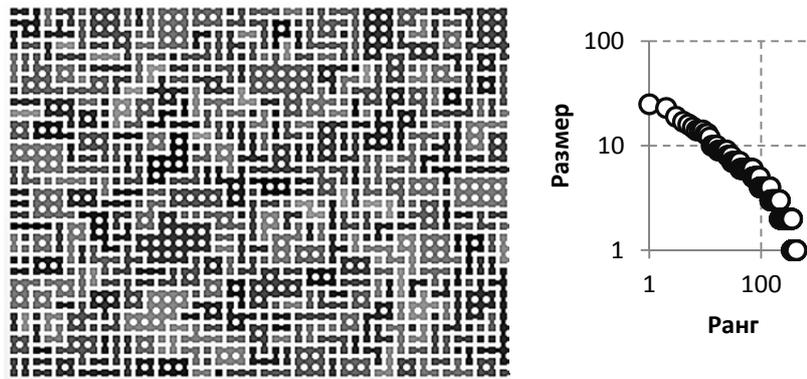
$w = D$ .

В модели можно идентифицировать один общий параметр, являющийся комбинацией релевантности (стресса)  $R$ , связности  $C$  и уровня обесценивания информации  $D$  (именно этот параметр определяет фазу системы):

$$g = \frac{RC}{D} \tag{7}$$

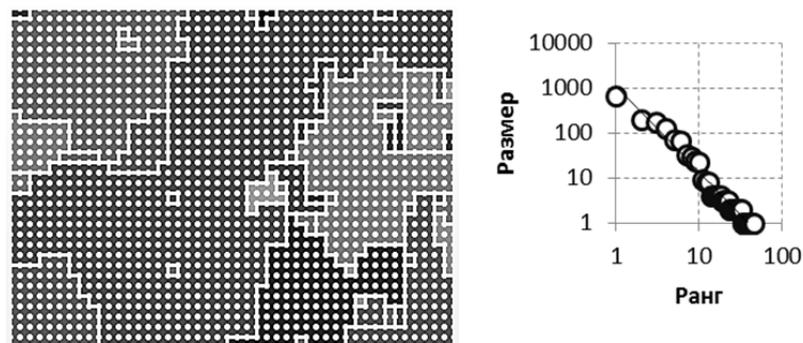
При низком значении  $g$  мы имеем дело с докритической фазой – большим числом мелких кластеров и экспоненциальным распределением кластеров по размеру.

Ниже представлены пространственные распределения кластеров при различных значениях  $g$ . Агенты, закрашенные одним и тем же цветом, выбрали один бренд.



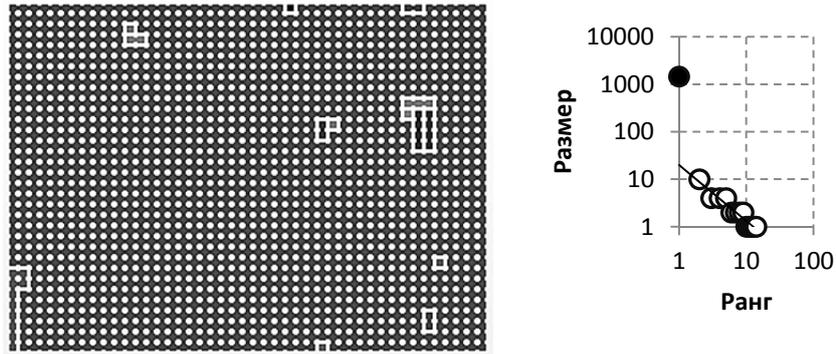
**Рис. 20.** Докритическая фаза,  $g = 1$

При увеличении значения  $g$  система входит в критическое состояние, и распределение становится степенным.



**Рис. 21.** Критическая фаза,  $g = 1,7$

При дальнейшем увеличении значения  $g$  появляется сверхъявление, то есть мы наблюдаем формирование гигантского кластера, охватывающего всю систему.



**Рис. 22.** Сверхкритическая фаза,  $g = 1,9$

Эволюция модели во времени показывает быстрое формирование кластеров при каждом значении  $g$ . Наиболее интересные эффекты наблюдаются при медленном возрастании  $g$  (и переходе из докритической фазы в закритическую). Типичное развитие данного сценария моделирования показано ниже.

Следует отметить, что динамика кластеров имеет три основных типа: быстрый рост (экспансия на соседние рыночные ниши), постоянное значение в определенный период времени (доминирование в нише), быстрый упадок (выталкивание из ниши захватчиком). В конечном итоге выигрывают не всегда те, которые начинают первыми.

Для сравнения с реальной жизнью рассмотрим реальную динамику корпоративных доходов и размеров империй.

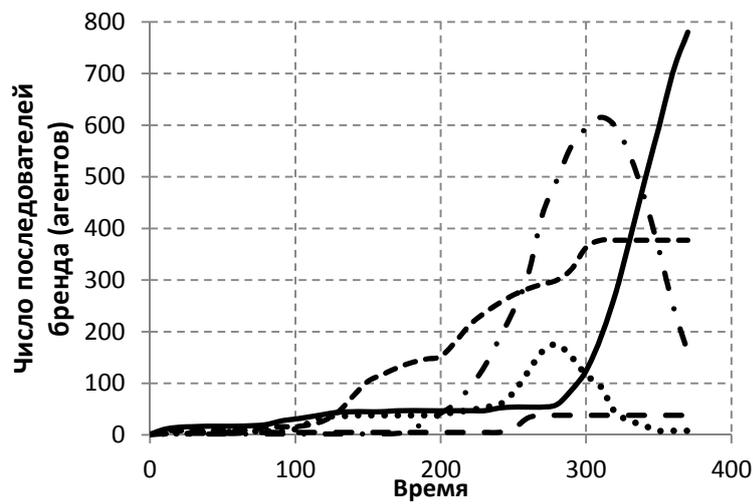


Рис. 23. Эволюция размеров кластеров в модели

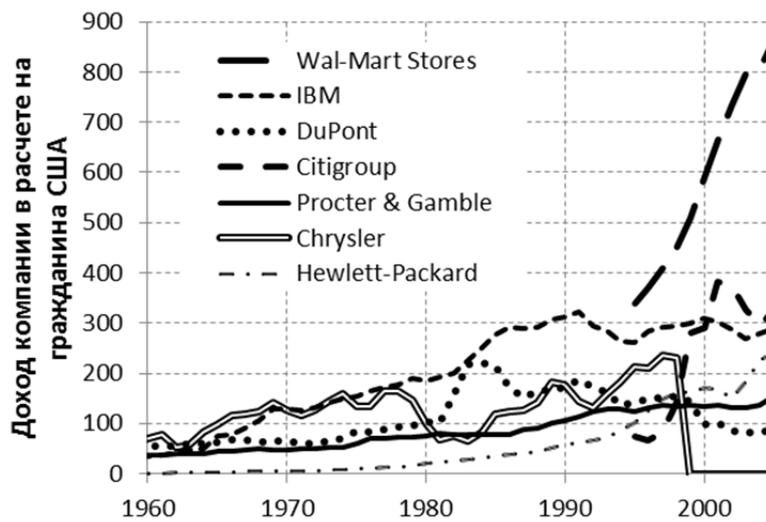
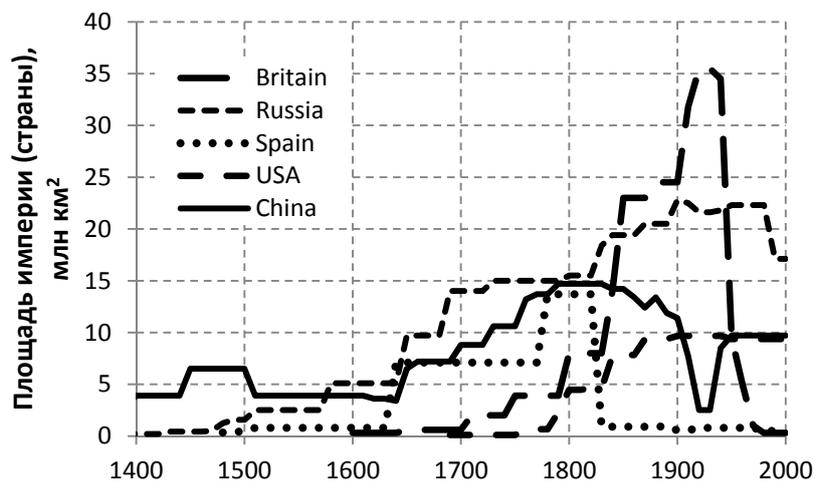


Рис. 24. Доход крупных компаний США, нормированный на численность населения США, в постоянных долларах 2000 г., 1960–2007 гг.

Источник: Fortune-500 2018.



**Рис. 25.** Размеры крупных стран и империй

Источник: Таагерера 1997.

При рассмотрении дохода компаний мы нормировали доход компаний на численность населения США, чтобы убрать эффект роста самой ниши (число потребителей росло). Можно видеть, что некоторые компании пришли к постоянной доле рынка (как *P&G* или *IBM*), некоторые быстро растут (*Wall-Mart*, *Citigroup*), а другие терпят крах и поглощаются (*DuPont*, *Chrysler*). Та же картина наблюдается и с империями. Они занимают ниши – географические регионы с естественными границами – и могут оставаться в пределах этих границ веками. Они быстро расширяются во время усиления могущества, но могут и рухнуть на несколько десятилетий, теряя огромные территории.

Описанная в работе интерактивная модель представлена на портале Open History<sup>\*\*</sup>. Интересующиеся могут зайти по указанному адресу и посмотреть динамику модели при различных значениях параметра  $g$ . Для получения исходных кодов программы можно кликнуть правой кнопкой по экрану и выбрать опцию *View Source*. Исходные коды могут быть скомпилированы *open-source* компилятором Flex SDK.

Подводя итог, отметим, что модель позволяет описывать оба сценария возникновения сверхъавлений. Сценарий системы под стрессом – это сценарий увеличения релевантности  $R$  (чувствительности элементов системы). Сценарий возрастания связности системы  $C$  – это сценарий увеличения межагентного влияния  $L_{ij}$ . Поскольку в модели  $r$  и  $L$  перемножаются,

<sup>\*\*</sup> URL: <http://www.openhistory.net/percolation/model>.

увеличение любого из них ведет к сходным эффектам – переходу за критический уровень и образованию суперкритического явления.

Таким образом, в статье дано объяснение возникновения сверхъявлений в выборках данных со степенным распределением. Наша гипотеза состоит в том, что основной причиной возникновения таких явлений в социальной сфере является пористая структура самих социальных систем. Отметим, что сверхкрупные явления могут возникать не только в пространстве, но и во времени, что связано с так называемыми режимами с обострением (см., например: Капица 2008; Капица и др. 2003; Коротаев и др. 2007; 2010; Korotayev 2005; 2007; 2008; 2009; 2012; Johansen, Sornette 2001; von Foerster *et al.* 1960; von Hoerner 1975; Yukalov *et al.* 2009), однако рассмотрение временных рядов выходит за рамки настоящего исследования.

### **Заключение**

В данной статье мы рассмотрели механизмы возникновения сверхъявлений, показав, что они являются не случайными аутлаерами, не объяснимыми статистикой степенных распределений, а естественным следствием появления очень крупных кластеров в пористой перколяционной среде. Это происходит в результате изменения внешних условий, таких как сверхкритическая нагрузка, увеличение чувствительности элементов системы или рост ее связности. В статье также представлен ряд примеров подобных явлений в истории человечества (возможность использования выявленных здесь закономерностей для решения других социоисторических задач продемонстрирована нами в других работах [см., например: Коротаев и др. 2016; Акаев *et al.* 2017]).

### **Библиография**

- Капица С. П. 2008.** *Очерк теории роста человечества: Демографическая революция и информационное общество.* М.: Никитский клуб.
- Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. 2003.** *Синергетика и прогнозы будущего.* М.: Эдиториал УРСС.
- Коротаев А. В. 2007.** Макродинамика урбанизации Мир-Системы: количественный анализ. *История и Математика: Макроисторическая динамика общества и государства* / Ред. С. Ю. Малков, Л. Е. Гринин, А. В. Коротаев, с. 21–39. М.: КомКнига/URSS.
- Коротаев А. В., Гринин Л. Е. 2007.** Урбанизация и политическое развитие Мир-Системы: сравнительный количественный анализ. *История и Математика: Макроисторическая динамика общества и государства* / Ред. С. Ю. Малков, Л. Е. Гринин, А. В. Коротаев, с. 102–141. М.: КомКнига/URSS.
- Коротаев А. В., Исаев Л. М., Шишкина А. Р. 2016.** Арабская весна как квазисуперкритическое явление? *Системный мониторинг глобальных и региональных*

рисков / Отв. ред. Л. Е. Гринин, А. В. Коротаев, Л. М. Исаев, К. В. Мещерина, с. 127–156. Волгоград: Учитель.

- Коротаев А. В., Малков А. С., Халтурина Д. А. 2007.** *Законы истории: Математическое моделирование развития Мир-Системы. Демография, экономика, культура.* М.: КомКнига/URSS.
- Коротаев А. В., Халтурина Д. А., Малков А. С., Божевольнов Ю. В., Кобзева С. В., Зинькина Ю. В. 2010.** *Законы истории. Математическое моделирование и прогнозирование мирового и регионального развития.* 3-е изд., испр. и доп. М.: ЛКИ/URSS.
- Акаев А., Korotayev A., Issaev L., Zinkina J. 2017.** Technological Development and Protest Waves: Arab Spring as a Trigger of the Global Phase Transition? *Technological Forecasting and Social Change* 116: 316–321.
- Albert R., Barabasi A. L. 2002.** Statistical Mechanics of Complex Networks. *Reviews of Modern Physics* 74(1): 47–97.
- Anderson C. 2006.** *The Long Tail. Why the Future of Business Is Selling Less of More.* New York, NY: Hyperion.
- Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. 1988.** Self-organized Criticality. *Physical Review A* 38: 364–374.
- Butler P. 2010.** Visualizing Friendships. *Facebook*. URL: <http://www.facebook.com/notes/facebook-engineering/visualizing-friendships/469716398919>.
- Clauset A., Shalizi C. R., Newman M. E. J. 2009.** Power-law Distributions in Empirical Data. *SIAM Review* 51(4): 661–703.
- Clauset A., Wiegell F. W. 2010.** A Generalized Aggregation-disintegration Model for the Frequency of Severe Terrorist Attacks. *Journal of Conflict Resolution* 54(1): 179–197.
- Clementi F., Di Matteo T., Gallegati M. 2006.** The Power-law Tail Exponent of Income Distributions. *Physica A* 370: 49–53.
- Cook W., Ormerod P. 2003.** Power Law Distribution of the Frequency of Demises of U.S Firms. *Physica A* 324(1–2): 207–212.
- Erdős P., Rényi A. 1960.** On the Evolution of Random Graphs. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* 5: 17–61.
- Foerster H. von, Mora P., Amiot L. 1960.** Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026. *Science* 132: 1291–1295.
- Fortune-500. 2018.** *Fortune-500 Database*. URL: <http://fortune.com/fortune500/>.
- Gabaix X. 2009.** Power Laws in Economics and Finance. *Annual Review of Economics* 1: 255–293.
- Gabaix X., Gopikrishnan P., Plerou V., Stanley H. E. 2003.** A Theory of Power Laws in Financial Market Fluctuations. *Nature* 423: 267–270.
- Gupta H. M., Campanha J. R. 2005.** Power-law Distribution in a Learning Process: Competition, Learning and Natural Selection. *Physica A* 345(1–2): 267–274.

- Hammersley J. M. 1957.** Percolation Processes: Lower Bounds for the Critical Probability. *The Annals of Mathematical Statistics* 28: 790–795.
- Hoerner S. J. von 1975.** Population Explosion and Interstellar Expansion. *Journal of the British Interplanetary Society* 28: 691–712.
- Huang P. C. C. 2002.** Development or Involution in Eighteenth Century Britain and China? *Journal of Asian Studies* 61: 501–538.
- Johansen A., Sornette D. 2001.** Finite-time Singularity in the Dynamics of the World Population, Economic and Financial Indices. *Physica A* 294(3–4): 465–502.
- Ising E. 1925.** Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik* 31: 253–258.
- Korotayev A. 2005.** Compact Macromodel of World System Evolution. *Journal of World-System Research* 11: 79–93.
- Korotayev A. 2007.** Compact Mathematical Models of World System Development, and how They Can Help Us to Clarify our Understanding of Globalization Processes *Globalization as Evolutionary Process: Modeling Global Change* / Ed. by G. Modelski, T. Devezas, W. R. Thompson, pp. 133–160. London: Routledge.
- Korotayev A. 2008.** Globalization and Mathematical Modeling of Global Development. *Hierarchy and Power in The History Of Civilizations: Political Aspects Of Modernity* / Ed. by L. E. Grinin, D. D. Beliaev, A. V. Korotayev, pp. 225–240. Moscow: LIBROCOM/URSS.
- Korotayev A. 2009.** Compact Mathematical Models of the World System Development and their Applicability to the Development of Local Solutions in Third World Countries. *Systemic Development: Local Solutions in a Global Environment* / Ed. by J. Sheffield, pp. 103–116. Litchfield Park, AZ: ISCE Publishing.
- Korotayev A. 2012.** Globalization and Mathematical Modeling of Global Development. *Globalistics and Globalization Studies* / Ed. by L. Grinin, I. Ilyin, A. Korotayev, pp. 148–158. Moscow; Volgograd: Moscow State University; Uchitel.
- Korotayev A., Grinin L. 2006.** Urbanization and Political Development of the World System: A Comparative Quantitative Analysis. *History and Mathematics. Historical Dynamics and Development of Complex Societies* / Ed. by P. Turchin *et al.*, pp. 115–153. Moscow: URSS.
- Korotayev A., Grinin L. 2012.** Global Urbanization and Political Development of the World System. *Globalistics and Globalization Studies* / Ed. by L. Grinin, I. Ilyin, A. Korotayev, pp. 28–78. Moscow; Volgograd: Moscow University; Uchitel.
- Korotayev A., Grinin L. 2013.** Urbanization and Political Development of the World System. *ENTELEQUIA Revista Interdisciplinar* 15 (especial 2013): 197–254.
- Levy M., Solomon S. 1997.** New Evidence for the Power-law Distribution of Wealth. *Physica A* 242(1–2): 90–94.
- Marketing Charts. 2011.** Top-10 Video, Multimedia Websites – February 2011. URL: <http://www.marketingcharts.com/interactive/top-10-video-multimedia-websites-february-2011-16415/>.

- NetMarketShare 2017.** URL: <http://marketshare.hitslink.com/report.aspx?qprid=4&qptimeframe=M&qpsp=144>.
- Petersen A. M., Wang F., Stanley H. E. 2010.** Methods for Measuring the Citations and Productivity of Scientists across Time and Discipline. *Physical Review E* 81: 036114.
- Pingdom. 2011.** 29 Social Networks That Have at Least One Million Visitors Per Day. URL: <http://royal.pingdom.com/2011/03/25/social-networks-one-million-visitors-per-day/>.
- Raan A. F. J. van. 2001.** Reference-based Publication Networks with Episodic Memories. *Physica A* 298: 530–536.
- Richardson L. F. 1948.** Variation of the Frequency of Fatal Quarrels with Magnitude. *Journal of American Statistical Association* 43(244): 523–546.
- Sinha S. 2006.** Evidence for Power-law tail of the Wealth Distribution in India. *Physica A* 359: 555–562.
- Sornette D. 2003.** *Why Stock Markets Crash. Critical Events in Complex Financial Systems.* Princeton; Oxford: Princeton University Press.
- Sornette D. 2009.** Dragon-Kings, Black Swans and the Prediction of Crises. *International Journal of Terraspace Science and Engineering* 2(1): 1–18. URL: <http://arXiv.org/abs/0907.4290>.
- Stephen A. T., Toubia O. 2009.** Explaining the Power-Law Degree Distribution in a Social Commerce Network. *Social Networks* 31(4): 262–270.
- Taagepera R. 1997.** Expansion and Contraction Patterns of Large Polities: Context for Russia. *International Studies Quarterly* 41: 475–504.
- The Pew Forum on Religion and Public Life. 2011.** *Religious Affiliation Database.* URL: <http://pewforum.org/Topics/Religious-Affiliation/Muslim/>.
- Watts D. J. 2004.** *Six Degrees: The Science of a Connected Age.* New York, NY: W. W. Norton & Company, Inc.
- White M. 2010.** *Death Tolls for the Man-made Megadeaths of the Twentieth Century.* URL: <http://users.erols.com/mwhite28/warstats.htm>.
- World Council of Churches. 2011.** WCC Member Churches and Councils: Profiles of Ecumenical Relationships. URL: <http://www.olkoumene.org/en/member-churches/>.
- World Gazetteer. 2011.** *World Gazetteer Database.* URL: <http://world-gazetteer.com/>.
- Yukalov V. I., Yukalova E. P., Sornette D. 2009.** Punctuated Evolution Due to Delayed Carrying Capacity. *Physica D* 238: 1752–1767.